

Zadania z matematyki dla studentów I – go roku studiów niestacjonarnych  
na kierunku Zarządzanie

**Zestaw 4**

1. Wyznacz i przedstaw geometrycznie dziedzinę funkcji:

a)  $f(x) = \log_{x-1} \sqrt{x^2 - 5x + 6}$  ;

b)  $f(x) = \frac{\sqrt{tgx}}{\sin x}$  ;

c)  $r(x) = \frac{3 \ln x + 2}{\ln(x-1)}$  ;

d)  $r(x) = \frac{x}{\arctg x - \frac{\pi}{4}}$  ;

e)  $g(x) = e^{\frac{2x+2}{x}}$  ;

f)  $f(x) = \arcsin(x^2 + 1)$

2 Dane są funkcje  $f(x) = \log_2 x$ ,  $g(x) = e^x$ ,  $h(x) = \frac{1}{x}$ ,  $u(x) = \sin x$ . Wyznaczyć superpozycje  $f(g(x))$ ,  $h(u(x))$ ,  $g(f(x))$ ,  $h(f(x))$ ,  $g(h(x))$ ,  $f(g(h(x)))$ ,  $h(g(f(x)))$ ,  $f(u(u(g(x))))$ .

3. Z jakich funkcji elementarnych składają się następujące funkcje złożone:

a)  $f(g(x)) = (\cos 2x - 1)^5$ ,

b)  $f(g(h(x))) = \frac{2}{\sqrt{\sin x + 1}}$ ,

c)  $f(g(h(x))) = \operatorname{tg} 2^{3x-5}$ ,

d)  $f(g(h(u(x)))) = \sqrt[3]{\ln \sin(x-1)}$ ,

e)  $f(g(h(u(x)))) = 2^{\sin^2 5x}$ .

4. Wyznaczyć funkcje odwrotne do:

a)  $y = 3x - 2$ ,

b)  $y = \sqrt{x+3} - 1$ ,

c)  $y = x^2 - 2x + 3$ ,

d)  $y = 4^{x-1}$ ,

e)  $y = 3^{2x+3} - 5$ ,

f)  $y = \ln x + 2$ ,

g)  $y = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$ ,

h)  $y = \sin^2 x - 1$ ,

i)  $y = \log_2 \cos(x+3)$ .

5. Wyznaczyć granice (przy  $x \rightarrow \infty$ ):  $\lim \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x+2)(x-1)}$ ,  $\lim \frac{(x^2 + 1)(x-2)}{x^4 + 3x^2 - 1}$ ,  $\lim \left( \frac{4x-2}{2x+1} \right)^3$ ,

$\lim \frac{3^x - 1}{3^x}$ ,  $\lim \left( 1 + \frac{3}{x} \right)^x$ ,  $\lim \left( \frac{x-4}{x} \right)^x$ ,  $\lim \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)^x$ ,  $\lim (\sqrt{x^2 + 2} - x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3^x + 4^x + 7^x}$ .

6. Wyznacz granice na końcach określoności funkcji:

a)  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$  ;

b)  $g(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-1}$  ;

c)  $h(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}$ .

7. Zbadać ciągłość funkcji:  $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{dla } x \neq 1 \\ 2x - 2, & \text{dla } x = 1 \end{cases}$ ,

8. Na podstawie definicji wyznaczyć pochodne funkcji:

a)  $f(x) = x^2 - 3x + 7$ ,

b)  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ,

c)  $h(x) = \sqrt{x+1}$ .

9. Obliczyć pochodne funkcji:  $y = \sin^2 x + \sin x^3$ ,  $y = (2x^2 + 1 - \sqrt{x}) \operatorname{ctg} x$ ,  $y = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x}$ ,

$$y = \frac{3x^3 + 2x - 1}{x + 1}, \quad y = (x^2 + 3x - \cos x)^5, \quad y = e^{\sin x}, \quad y = \operatorname{arctg} \sin 2x, \quad y = \sin^2(x^3 + e^x),$$

$$y = \operatorname{arctg} \ln \cos x, \quad y = \sin^2 \ln \left( 3^{\frac{1}{x}} + 1 \right), \quad y = \ln(x + \sqrt{ax - 1}), \quad y = x^4 4^x, \quad y = x^x, \quad y = (\sin x)^{\cos x},$$

$$y = x^{\frac{1}{x}}, \quad y = x^{\ln x}.$$

10. Korzystając z reguły De l'Hospitala wyznaczyć granice:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{x-1} - 1}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x}{x^2}.$$

11. Napisz równanie stycznej (lub stycznych) do krzywej

a)  $y = \sin 2x$  w p-cie  $x_0 = \frac{\pi}{6}$ ,

b)  $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$  i równoległej do prostej  $y = 5x + 3$ ,

12. Wyznaczyć kąt przecięcia się krzywych:

a)  $y = -0,5x^2 + 4$  i  $x + y = 4$ ,

b)  $y = \sin x$  i  $y = \cos x$ .

13. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji:

a)  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ ,      b)  $h(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$ ,      c)  $g(x) = \frac{x^2}{x-3}$ ,

d)  $k(x) = x^2 e^x$ ,      e)  $r(x) = e^{x^3 - 6x^2}$ ,      f)  $t(x) = x \ln x$ ,

e)  $s(x) = \cos 3x + 6x$

14. Wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji:

a)  $f(x) = \ln(9 - x^2) + 1$ ,      b)  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,      c)  $h(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$ .

d)  $k(x) = x^2 e^x$ .

15. Wyznaczyć różniczki funkcji:

a)  $h(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2$ ,      b)  $k(x) = x^2 e^x$ ,      c)  $t(x) = x \ln x$ .

16. Wykorzystując pojęcie różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość:

a)  $\ln 1,02$ ,

b)  $\sqrt[3]{28}$ ,

c)  $\sqrt[4]{15}$ .