Zadania z Matematyki I dla studentów I – go roku studiów stacjonarnych (Ekonomia)

Zestaw 12

1) Wykazać, że każda macierz symetryczna stopnia drugiego ma dwie wartości własne.

2) Zapisać wielomiany charakterystyczne macierzy

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & n & 0 & \dots & 0 & 0\\ 2 & 1 & n & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ n-2 & n-3 & n-4 & \dots & n & 0\\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & n\end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć pierwiastki tych wielomianów.

3) Znaleźć wartości własne przekształceń liniowych o podanych macierzach

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, b) $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$, c) $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$, d) $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

4) Sprowadzić macierz $\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ do postaci diagonalnej.

5) Znaleźć bazę, w której macierz przekształcenia liniowego przyjmie postać diagonalną $\boldsymbol{\Delta}$. Sprawdzić, czy macierz przejścia **P** jest macierzą ortogonalną oraz czy zachodzi związek $\Delta = P^{-1}\circ A\circ P$.

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, b) $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

6) Wyznaczyć wartości własne i wektory własne przekształcenia liniowego, które przeprowadza wektory $x^1=(1,1)$, $x^2=(-2,3)$ na wektory $y^1=(0,6)$, $y^2=(-5,8)$ odpowiednio.

7) Zbadać, czy istnieje baza, w której macierz przekształcenia $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

przyjmuje postać diagonalną.