Zadania z Matematyki I dla studentów I – go roku studiów zaocznych

na kierunku ekonomia

GEOMETRIA ANALITYCZNA PRZESTRZENI WIELOWYMIAROWEJ

1. Wyznacz wektor $\mathbf{a} = 2\mathbf{x} - 3\mathbf{y} + \mathbf{z}$ dla $\mathbf{x}$ = (1, 2, 3, 4), $\mathbf{y}$ = (4, 3, 2, 1), $\mathbf{z}$ = (5, 5, 5, 5).

2. Dane są punkty $x = (1,-3,0,2)$, $y = (4,,2,1,0)$ i $z = (0,1,-3,4)$. Oblicz odległość między każdą parą punktów wykorzystując:
   a) odległość euklidesową,
   b) odległość miejską,
   c) odległość Czebyszewa.

3. Wyznacz iloczyny skalarne wektorów
   a) (2, 0, 1, -1,5) i (1, -1, 2, 2, 3),
   b) (2, 2, 2, ...,2) i (2, -1, 2,..., -1).

4. Wyznacz normę (długość) wektorów:
   a) $a = (1,-3,0,2), b = (1,-5,-2,4)$,
   b) $a = (0,1,0,1,....,0,1)$; $b = (3,-1,3,-1,\ldots,-1)$; $b - a$,
   c) $\mathbf{x} = (1,3,1,\ldots,3), \mathbf{y} = (1,2,3,\ldots,n) \in R^n$.

5. Znajdź kąt między wektorami (1, 1, 1, ...,1) i (1, -1, 1,..., -1).

6. Wyznacz zbiór wektorów, prostopadłych jednocześnie do a= (1, 0, -2) i b=(0, 2, 1).

7. Napisać równanie parametryczne i kierunkowe prostej
   a) przechodzącej przez punkt $x^0 = (2,0,-1,3,5)$ i mającej kierunek $a = (0,-1,2,3,2)$,
   b) przechodzącej przez punkty $x^1 = (-2,1,0,3)$ i $x^2 = (2,-1,3,0)$.

8. Zapisz równania odcinków będących bokami trójkąta o wierzchołkach $a = (1,0,-1,3)$, $b = (-2,1,1,0)$, $c = (2,1,3,-1)$

9. Napisać równanie płaszczyzny:
   a) przechodzącej przez punkt $x^0 = (2,-1,0,1)$ i prostopadłej do wektora $a = (2,0,1,-3,-1)$,
   b) przechodzącej przez punkty $x^1 = (1,1,0)$, $x^2 = (4,-1,-1)$, $x^3 = (3,-2,1)$,
   c) do której należy punkt $x^0 = (3,4,0)$ i prosta $\dfrac{x_1 - 2}{2} = \dfrac{x_2 - 3}{2} = \dfrac{x_3 + 1}{4}$,
   d) przechodzącej przez punkt $x^1 = (2,2,2,\ldots,2)$ i równoległej do płaszczyzny $\sum_{i=1}^{n} i \cdot x_i = 0$,
   e) przechodzącej przez środek sfery $\sum_{i=1}^{4} (x_i - 2i)^2 = 1$ i prostopadłej do wektora $a = (1,2,3,0)$.

10. Napisz równanie sfery:
   a) środku w $x^0 = (0,1,-2,3,-3)$ i promieniu $r = 4$

b) o środku $\mathbf{x}^0 = (2, 4, 6)$, do której należy punkt $\mathbf{x}^1 = (4, 6, 7)$,

c) której średnicą jest odcinek o końcach $x^1 = (1, 2, 3, \ldots, n)$, $x^2 = (3, 4, 5, \ldots, n+2)$.

11. Znajdź rzut prostopadły punktu (1, 0, 1, -2) na płaszczyznę $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 13$.

12. Wyznaczyć $A \cap B$, $A \cap C$ oraz $A \cap D$ jeżeli: $A = \left\{ x \in R^3 : \frac{x_1 - 1}{2} = x_2 - 2 = \frac{3 - x_3}{2} \right\}$,

$B = \left\{ x \in R^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \right\}$, $C = \left\{ x \in R^3 : \sum_{i=1}^{3} (x_i - i)^2 = 4 \right\}$, $D = \left\{ x \in R^3 : \sum_{i=1}^{3} (x_i - i)^2 \le 4 \right\}$.

13. Wyznacz część wspólną zbiorów $W = \{ x \in R^3 : x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 8 \text{ i } x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 12 \}$ oraz $p = \{ x \in R^3 : x_1 = 2t, x_2 = 2 - t, x_3 = 1 + t,\ t \in R \}$.

14. Obliczyć odległość:

a) punktu $x^0 = (1,\ 0, 2, 1)$ od hiperpłaszczyzny $H = \left\{ x \in R^4 : 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \right\}$,

b) punktu $x^0 = (2, 0, -1, 1)$ od prostej $P = \left\{ x \in R^4 : x_1 = 1 - t, x_2 = 2,\ x_3 = 1 + 2t, x_4 = 3t \right\}$,

c) punktu $x^0 = (1,\ 1, 1, \ldots 1)$ od zbioru $S = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \frac{1}{4} \right\}$,

d) płaszczyzny $\sum_{i=1}^{4} i x_i = 10$ od sfery $\sum_{i=1}^{4} (x_i - 2i)^2 = 1$,

e) między płaszczyznami: $2x + 4y - 6z = 14$ i $x + 2y - 3z = 1$,

f) $K_1 = \{ (x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \}$ i $K_2 = \{ (x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 8z + 44 \le 0 \}$,

g) $S = \{ \mathbf{x} \in R^3 :\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 = 0 \}$ i $H = \{ \mathbf{x} \in R^3 :\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4 \}$.